MODELACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN VERTICAL GENERADA POR TRÁFICO DE MAQUINARIA EN EL PERFIL DEL SUELO. UNA APROXIMACIÓN ANALÍTICA[1]

Modelling vertical stress distribution due to machinery traffic on the soil profile. An analytical approach

Ricardo Smith R.[2] y Achim Ellies S.[2]

ABSTRACT

Modelling compaction processes for agricultural or forest soils provides a quantitative method to estimate and predict the physical changes of soil, hence allowing their comparison with the maximum variations permitted without damaging the productive potential of soil. Principles of the Elasticity Theory were used to derive equations describing stress distribution in a semiinfinite and homogeneous medium when a punctual load was applied on its surface. A concentration factor λ was introduced in order to correct the equations for the plastic properties of soil, and an expression for continuous load distributions and different shapes of the tire-soil interface was obtained by applying the principle of superposition. The effect of the contact area shape and superficial load distribution are discussed through simulations. When different forms of estimating the concentration factor λ were compared, data suggests that simplified procedures of calculation can lead to inaccurate estimates.

Key words: Stress distribution, Boussinesq equations, concentration factor, soil compaction.

INTRODUCCIÓN

Actualmente existe una gran cantidad de investigación sobre la compactación provocada por maquinaria agrícola o forestal (Voorhees *et al.*, 1978; Taylor *et al.*, 1982; Willatt y Pullar, 1983; Dexter, 1986; Gupta y Allmaras, 1987; Lebert y Burger, 1989; Wästerlund, 1992;Gupta y Raper, 1994; Horn *et al.*, 1995) y los efectos que ella tiene sobre las propiedades físicas de los suelos, con el posterior detrimento que ello implica en los rendimientos de los cultivos. Desgraciadamente, la mayor parte de dicha investigación está enfocada a una comprensión general y cualitativa del fenómeno. Esto ha provocado la carencia de información cuantitativa "reproducible", es decir, frente al mismo fenómeno, aparentemente en condiciones experimentales similares, no se obtienen los mismos resultados.

La modelación matemática de los procesos de compactación en suelos de interés agrícola o forestal entrega una herramienta cuantitativa para estimar y predecir los cambios físicos provocados sobre el suelo, los que posteriormente pueden compararse con las máximas variaciones permitidas sin dañar el potencial productivo del recurso (Ellies *et al.*, 1996). La elaboración de estos modelos pasa por la determinación de las presiones generadas en la zona de contacto suelo-neumático, representación de las relaciones esfuerzo-deformación y, finalmente, establecer un modelo para la propagación de las presiones

[1]Recepción de originales: 10 de octubre de 1997.
Financiado por FONDECYT 1970301 y DID UACH F-97-02.
[2]Universidad Austral de Chile, Facultad de Ciencias Agrarias, Casilla 567, Valdivia, Chile.
E-mail: rsmith@valdivia.uca.uach.cl

a través del perfil (Gupta y Raper, 1994). Una forma de lograr esto último es mediante procedimientos analíticos, válidos para medios elásticos y homogéneos. Luego, mediante modificaciones a las soluciones así obtenidas es posible adaptarlas, en alguna medida, a las características reales de los suelos y obtener modelos con un mayor valor predictivo.

Un parámetro numérico, denominado factor de concentración (λ), fue introducido por Fröelich (1934) en la década de los 30, para describir la distribución de la tensión mecánica en el suelo en condiciones en que no se cumpliera estrictamente la hipótesis de elasticidad. El mismo parámetro permite además comparar la resistencia mecánica de distintos suelos. En su trabajo, Fröelich empleó las ecuaciones de Boussinesq (1885), las cuales son aplicables sólo a medios elásticos y por ello no permiten explicar diferencias en textura, contenido de agua o densidad aparente. Sin embargo, introduciendo el factor de concentración en la ecuación para el esfuerzo vertical, es posible estimar la distribución de este esfuerzo bajo una carga puntual que es aplicada a un medio (suelo), no necesariamente elástico y homogéneo. La ecuación original para la presión o esfuerzo vertical, σ_z, generada por una carga puntual P fue entonces modificada a:

$$\sigma_1 = \sigma_z = -\frac{\lambda P}{2\pi}\frac{z^{\lambda}}{r^{\lambda/2+1}} \qquad (A.1)$$

Donde r y z definen la distancia y componente vertical de esta, respectivamente, entre la carga superficial y el punto en el volumen del suelo en que interesa estimar σ_z. El factor de concentración, λ, es igual a 3 en la ecuación original de Boussinesq. Soehne (1958) fue el primero en describir la distribución de la tensión en un suelo agrícola utilizando la ecuación modificada de Fröehlich.

Alternativamente, cuando es posible medir la presión vertical media (σ_0)en la zona de contacto suelo-neumático y además conocer la presión vertical a una profundidad z en el suelo bajo el centro de carga (σ_z), es posible estimar el valor del factor de concentración mediante la expresión (Horn, 1989):

$$\lambda = \frac{2\,Log\left[\dfrac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_z}\right]}{Log\left[\left(\dfrac{R}{z}\right)^2 + 1\right]} \qquad (A.2)$$

Sin embargo, esta expresión sólo es aplicable bajo la siguientes condiciones: el área de contacto debe ser de forma circular (radio R), la presión σ_0 debe ser uniforme en toda el área de contacto, y sólo puede ser posible conocer λ entre puntos que estén a lo largo de la vertical que pasa por el centro de carga. Además no entrega solución real si $\sigma_0 < \sigma_z$.

Esta etapa de la investigación correspondió al desarrollo teórico del modelo. El problema a solucionar era encontrar ecuaciones matemáticas que entregasen la distribución de la componente vertical del esfuerzo (σ_z)generada por la aplicación de una distribución de carga conocida en la superficie de un suelo, considerado aquí como un medio elástico, homogéneo e isótropo. Ninguna restricción sobre la forma del área de contacto ni sobre la distribución de la carga en la zona de contacto suelo-neumático fue impuesta a priori. Lo anterior permitiría estimar el factor de concentración para un mayor rango de situaciones que aquel permitido por la expresión (A.2).

MATERIALES Y MÉTODOS

El primer paso en la búsqueda del modelo fue, basándose en la Teoría de la Elasticidad (Timoshenko y Goodier, 1951), encontrar la distribución de esfuerzos generada por una carga puntual. Luego, dicha solución se extendió mediante integración a distribuciones continuas de carga.

El suelo se asumió como un medio continuo, homogéneo y semiinfinito, extendiéndose desde

el plano $z = 0$ a $z = -\infty$. Se tuvo así un problema con simetría azimutal en torno al eje z, lo que permite trabajar cómodamente con coordenadas cilíndricas o polares, según convenga. En los cálculos se siguió el procedimiento empleado por Timoshenko y Goodier (1951).

El modelo se probó en simulaciones con valores de λ que variaran con la profundidad del suelo, diferentes formas del área de contacto neumático-suelo y distintas distribuciones de la presión en dicha zona. Una explicación detallada de la metodología empleada en la determinación *in situ* de las presiones verticales (σ_z) y de la estimación de la presión en la zona de contacto (σ_0) puede encontrarse en Smith (1998).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esfuerzos bajo una carga puntual. Para una simetría azimutal, las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para los distintos esfuerzos son satisfechas si (Timoshenko y Goodier, 1951):

$$\sigma_\rho = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial \rho^2}\right)$$

$$\sigma_\phi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2\Phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial_\rho}\right) \qquad (1)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)$$

$$\tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial_\rho}\left((1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial_z{}^2}\right)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson; σ_ρ, σ_ϕ y σ_z son los esfuerzos principales en las direcciones radial, azimutal y vertical; $\tau_{\rho z}$ es el esfuerzo de corte (Figura 1) y Φ, la "función de esfuerzo", debe satisfacer:

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi) = 0, \qquad (2)$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el operador de Laplace en coordenadas cilíndricas. Para simetría axial $\frac{\partial^n}{\partial\phi^n}(\ ) = 0$, por lo tanto

$$\nabla^4\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad (3)$$

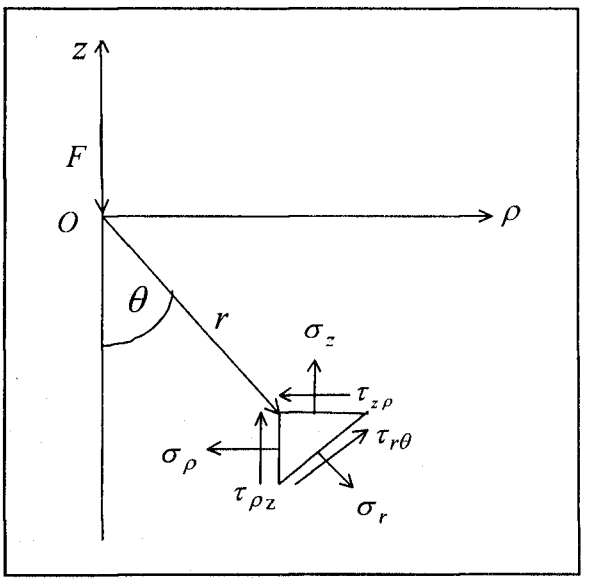

Figura 1. Diagrama de esfuerzos para coordenadas cilíndricas (ρ, $\phi = 0$, z) y polares (r, θ).
Figure 1. Stress diagram in cylindrical (ρ, $\phi = 0$, z) and polar (r, θ) coordinates.

El problema se reduce a encontrar una solución de (3), acorde con las condiciones de borde, para luego obtener a partir de ella las expresiones de los esfuerzos mediante (1). Para encontrar Φ es útil expresar la ecuación diferencial en coordenadas polares (r, θ) en lugar de cilíndricas (ρ, z) (Figura 1). Resolviendo luego para una carga puntual F aplicada en el origen (Figura 1), se encuentra:

$$\Phi = B\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

reemplazando en (1) se obtienen los siguientes componentes de esfuerzo:

$$\sigma_\rho = B\left[(1-2\nu)\, z\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\rho^2 z\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

$$\sigma_\phi = B\,(1-2\nu)\, z\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sigma_z = -B\left[(1-2\nu)\, z\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right] \tag{5}$$

$$\tau_{\rho z} = -B\left[(1-2\nu)\,\rho\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3\rho\, z^2\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

Las condiciones de borde para estas expresiones son:

a) σ_ρ, σ_z, σ_ϕ y $\tau_{\rho z} \to 0$ cuando $\rho, z \to \infty$, es decir, las tensiones deben anularse a gran distancia de la carga que las genera.

b) σ_ρ, σ_z, σ_ϕ y $\tau_{\rho z}$ deben anularse en el plano $z = 0$ (excepto en el origen, el único lugar donde existe carga).

c) En el origen existe una fuerza de magnitud F orientada en el sentido negativo del eje z.

La condición a) se satisface claramente. Sin embargo, la condición b) no se cumple, pues en $z = 0$, se tiene un esfuerzo de corte no nulo:

$$\tau_{\rho z} = -\frac{B\,(1-2\nu)}{\rho^2}$$

Para eliminar este esfuerzo de corte no deseado, Timoshenko y Goodier (1951) introducen la idea de "centros de presión". Esto equivale a considerar que al aplicar una fuerza en la superficie del cuerpo, en este caso el suelo, la presión generada en cada punto bajo la línea de acción de esa fuerza, hace que dicho punto comunique presión hacia su vecindad (centro de presión); la magnitud de esta presión disminuirá mientras más alejado esté el punto en cuestión del lugar donde se aplica la carga, en este caso F.

Cada centro de presión (de tamaño infinitesimal) generará esfuerzos dentro del cuerpo. Los esfuerzos, generados por un centro de presión O' (ubicado en las coordenadas) sobre un punto P cualquiera en el volumen del suelo, con coordenadas $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z}$ (Figura 2), pueden calcularse a partir de las expresiones (5), utilizando el principio de superposición (Timoshenko y Goodier, 1951; Smith, 1998). El resultado es:

$$\sigma'_\rho = \sigma_r \operatorname{sen}^2\theta + \sigma_\tau \cos^2\theta = A\left(\rho^2 - \frac{1}{2}(z-z')^2\right)(\rho^2+(z-z')^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$\sigma'_z = \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\tau \operatorname{sen}^2\theta = A\left((z-z')^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right)(\rho^2+(z-z')^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$\tau'_{\rho z} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_r)\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{2}A\rho z\,(\rho^2 + (z-z')^2)^{\frac{5}{2}} \tag{6}$$

$$\sigma'_\phi = \sigma_\tau = -\frac{1}{2}A\,(\rho^2 + (z-z')^2)^{\frac{3}{2}}$$

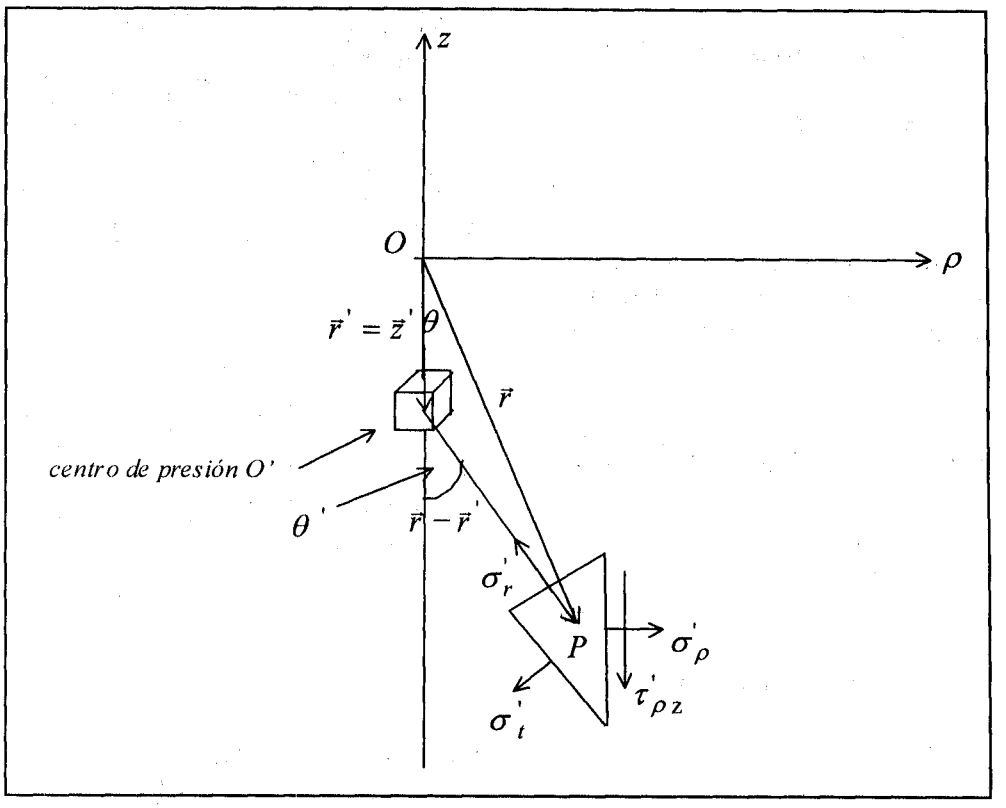

Figura 2. Diagrama de esfuerzos generados por un centro de presión en O'.
Figure 2. Stress diagram for a pressure centre (O').

Los esfuerzos totales sobre el punto P se obtendrán al sumar los esfuerzos generados por cada uno de los centros de presión ubicados a lo largo del eje z. Esto nos permitirá obtener una segunda solución, que también satisface las condiciones de equilibrio y compatibilidad, dado que no es más que una suma o superposición de soluciones del tipo (5). Tenemos entonces:

$$\sigma_\rho = \int_{-\infty}^{0} \sigma'_\rho \, dz' = \frac{A}{2}\left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{z}{\rho^2}\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} - z\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$\sigma_z = \int_{-\infty}^{0} \sigma'_z \, dz' = \frac{A}{2} z\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sigma_\phi = \int_{-\infty}^{0} \sigma'_\phi \, dz' = -\frac{A}{2}\left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{z}{\rho^2}\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \qquad (7)$$

$$\tau_{\rho z} = \int_{-\infty}^{0} \tau'_{\rho z} \, dz' = \frac{A}{2}\rho\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Estas soluciones satisfacen la condición de borde a), pero la condición b) es nuevamente insatisfecha, pues:

$$\tau_{\rho z}(\rho, z=0) = \frac{1}{2}\frac{A}{\rho^2} \neq 0 \qquad (8)$$

Lo más cómodo en este caso es agregar otra solución que satisfaga la condición a) y que, superpuesta a la anterior, permita satisfacer completamente b). Pero esa otra solución ya la hemos calculado y es la dada por las ecuaciones (5), para las cuales el esfuerzo de corte en la plano $z = 0$ era:

$$\tau_{\rho z}(\rho, z=0) = -\frac{B(1-2\nu)}{\rho^2}$$

superponiendo esta expresión al esfuerzo de corte dado por (8), se tiene que la condición b) es satisfecha completamente si

$\frac{1}{2}\frac{A}{\rho^2} - \frac{B(1-2\nu)}{\rho^2} = 0$, lo que establece la condición para las constantes A, B:

$$A = 2\,B\,(1 - 2\nu) \tag{9}$$

Reemplazando y sumando las expresiones (5) y (7) se obtienen las ecuaciones de Boussinesq para los esfuerzos generados por una carga puntual:

$$\sigma_\rho = B\left\{(1-2\nu)\left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{z}{\rho^2}\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] - 3\rho^2 z\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right\}$$

$$\sigma_z = -3Bz^3\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\sigma_\phi = B(1-2\nu)\left[-\frac{1}{\rho^2} + \frac{z}{\rho^2}\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} + z\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \tag{10}$$

$$\tau_{\rho z} = -3B\rho z^2\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Sólo resta establecer el valor de B, que está determinado por la condición de borde c), realizando los cálculos necesarios se encuentra (Timoshenko y Goodier, 1951; Smith, 1998):

$$B = \frac{F}{2\pi}$$

Esfuerzo vertical bajo distribuciones continuas de carga. De los esfuerzos presentes en (10), el que interesa a este estudio es el esfuerzo o presión vertical:

$$\sigma_z = -\frac{3F}{2\pi} z^3\left(\rho^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} \tag{11}$$

La expresión anterior entrega dicho esfuerzo para cualquier punto dentro del suelo, pero sólo es válida cuando la carga en la superficie es puntual. Esto, sin embargo, no representa la realidad de nuestro problema, dado que en terreno un neumático carga el suelo con un área de contacto de forma y tamaño determinados. Para extender la solución (11) a esa situación, puede considerarse la zona de contacto suelo-neumático como un conjunto de cargas puntuales, de manera que el efecto de la carga total equivale a la superposición de los efectos de las distintas cargas infinitesimales. Matemáticamente ello implica lo siguiente:

$$F \rightarrow dF = \sigma(\rho, \phi) \cdot \rho\, d\phi\, d\rho,$$

donde $\rho\, d\phi\, d\rho$ es el elemento infinitesimal de área y $\sigma(\rho, \phi)$ es la densidad de carga en el punto (ρ, ϕ) de la zona de contacto S, ambos en coordenadas cilíndricas, y el esfuerzo normal vertical en un punto de coordenadas $\vec{r} = (\vec{\rho}, \vec{z})$

$$\sigma_z(\rho,\phi,z) = \frac{3z^3}{2\pi}\iint_{S'} \frac{\sigma(\rho',\phi')\rho' d\rho' d\phi'}{\left[\left(\vec{\rho}-\vec{\rho}'\right)^2 + z^2\right]^{\frac{5}{2}}}$$

Carga circular uniforme. Para una carga uniforme σ_0, aplicada sobre una zona de contacto de forma circular de radio a, la integral en (12) se transforma en:

$$\sigma_z(\rho,z) = \frac{3z^3\sigma_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\left[\kappa^2 + \left(\rho' - \rho\cos\phi'\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}} \tag{13}$$

con $\kappa^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi' + z^2$

La expresión (13) contiene integrales elípticas, por lo que no es factible de resolver en forma exacta (salvo para puntos bajo el centro de carga, es decir, $\rho = 0$), pero sí numéricamente. El resultado puede representarse como una distribución de líneas de igual presión vertical (isobaras), como se aprecia en la Figura 3. En dicha figura, los valores en los ejes vertical y horizontal están medidos en unidades relativas a a, mientras que la tensión representada por las isobaras está medida en unidades relativas a $\sigma_0 = \frac{P}{\pi a^2}$, la presión media en la superficie, donde P es la parte del peso de la maquinaria

que descansa sobre el neumático en cuestión. Se observa que las máximas tensiones ocurren bajo el centro del área cargada, bajando a la mitad de σ_0 a una profundidad igual a aproximadamente 1,2 veces el radio del área cargada.

Un análisis más cuidadoso de la Figura 3, muestra lo que ocurre cuando al aumentar el peso de la maquinaria, se incrementa también el tamaño y ancho de los neumáticos (y con ello la superficie de contacto) con el fin de no aumentar la exigencia sobre el suelo. Si el efecto final resulta ser que se mantiene la magnitud de σ_0, es porque también se ha incrementado el valor de a, lo que equivale, de acuerdo a la figura, a que junto con aumentar el volumen de suelo afectado, las tensiones profundicen en el perfil. Así, presiones verticales del orden del 80% de σ_0, que antes se concentraban próximas a la superficie, donde resulta fácil "soltar" el suelo con las labores habituales de labranza, ahora penetran a profundidades donde el problema de compactación es de más difícil solución. Debe tenerse en cuenta, que si las condiciones elásticas se mantienen, cuando a aumenta en un número determinado de centímetros, en igual cantidad profundizan las tensiones.

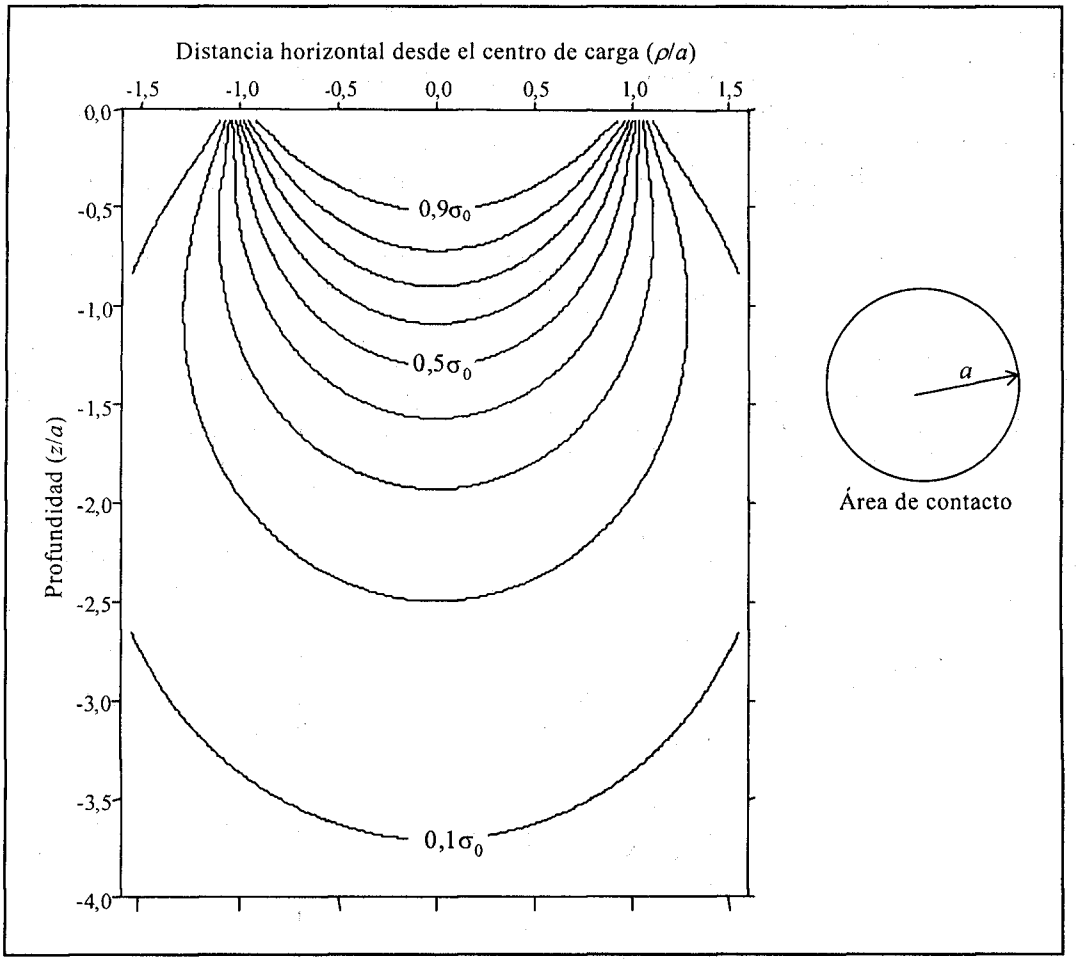

Figura 3. Isobaras de tensión vertical para una superficie de contacto suelo-neumático circular ($r = a$) y presión de contacto σ_0 uniforme.

Figure 3. Vertical stress isobars under circular contact soil-tire area ($r = a$) and uniform contact pressure σ_0.

Factor de concentración. El siguiente paso a este nivel del problema es considerar las distintas resistencias que los suelos oponen a la carga, las cuales varían, principalmente, con las propiedades mecánicas intrínsecas, densidad y calidad de raíces y el contenido de humedad (Horn y Lebert, 1994). Para ello es útil introducir el factor de concentración, γ, en la ecuación (12). El resultado es el siguiente:

$$\sigma_z(\rho,\phi,z) = \lambda \frac{z^{\lambda}}{2\pi} \iint_{S'} \frac{\sigma(\rho',\phi')\,\rho' d\rho' d\phi'}{\left[\kappa^2 + \left(\rho' - \rho\cos(\phi - \phi')\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}+1}} \quad (14)$$

con $\kappa^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2(\phi - \phi') + z^2$.

El efecto de la introducción de éste coeficiente puede verse en la Figura 4. Claramente valores de λ cercanos a 1 caracterizan condiciones de suelo resistentes a la penetración en profundidad de la presión; suelos con λ del orden de 6, por el contrario, indican condiciones predisponentes a una alta penetración de las líneas de presión, con una baja difusión horizontal. Al comparar las líneas de 0,5 σ_0 para $\lambda = 1$ y $\lambda = 6$ se aprecia que en el primer caso la presión disminuye al 50%, en aproximadamente un cuarto de la profundidad necesaria para que ocurra lo mismo en el segundo caso.

Dado que en general, las estratas que conforman el perfil de un mismo suelo difieren en su resistencia, es perfectamente posible emplear en (14) un valor para el factor de concentración que sea variable con la profundidad, es decir, $\lambda = \lambda(z)$. La variación en profundidad de las propiedades mecánicas en un suelo, sin embargo, no es continua, siendo, más bien, discontinua. Para el análisis de este problema es necesario considerar estratas de espesor determinado, resolver en cada una la ecuación (3) y luego aplicar las condiciones de borde apropiadas en cada superficie de separación. El desarrollo matemático correspondiente no se incluye en este artículo.

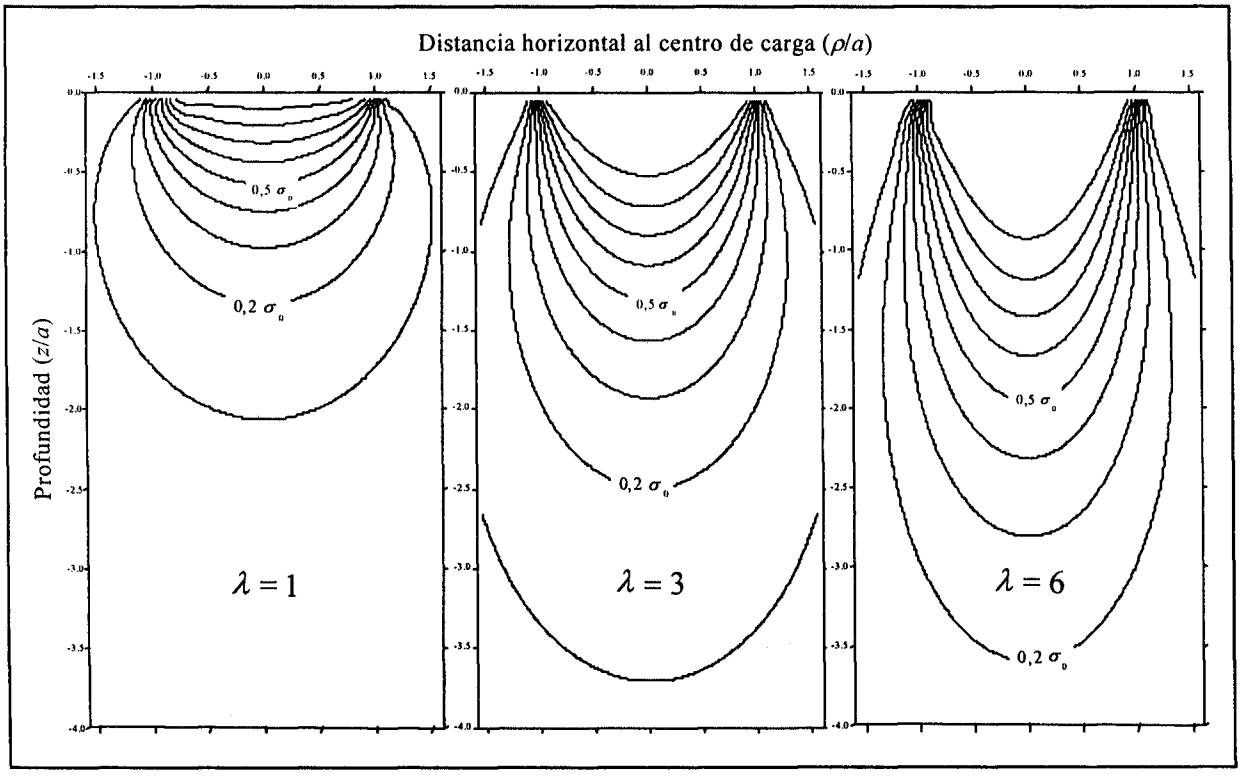

Figura 4. Distribución de tensiones para distintos valores del factor de concentración (λ).
Figure 4. Stress distribution for different concentration factors (λ).

Un ejemplo cualitativo de lo que es posible esperar en perfiles con estratas muy diferentes se muestra en la Figura 5, donde se ha considerado una estrata resistente $\lambda = 1$ entre otras dos estratas de menor resistencia, una superficial y otra profunda, ambas con $\lambda = 3$. Obsérvese como es frenada la penetración de la tensión en la estrata resistente, absorbiendo la primera estrata prácticamente el total de la carga, compactándose, por lo tanto, mucho más que si la estrata "dura" estuviese ausente.

La ecuación (14) permite además, para cualquier forma de la superficie de contacto y conociendo la distribución de presión en dicha zona de contacto, calcular numéricamente el valor de λ a una profundidad z, siempre que sea posible conocer la presión σ_0 a esa profundidad.

La forma más habitual de la superficie de contacto suelo-neumático se aproxima a una elipse. La ecuación (15) entrega la distribución de tensiones correspondiente a esa geometría, para una distribución de carga uniforme, σ_0. La Figura 6 es la representación gráfica de (15) para una relación entre semiejes menor y mayor (b/a) de la elipse igual a 1/2. Distribuciones más complejas, que serían posibles de esperar dadas las distintas formas, resistencias de las carcasas y presiones de inflado de los neumáticos, no implican mayor complicación matemática, haciendo necesario sí, el uso de coordenadas elípticas en lugar de cilíndricas. Un problema adicional es el mayor tiempo requerido por los ordenadores comunes para encontrar las soluciones numéricas, tiempo que, dependiendo de la complejidad de las funciones consideradas, puede implicar que la elaboración de una gráfica como la Figura 6 o la determinación detallada de los factores de concentración para el perfil de un suelo, tome un tiempo considerable.

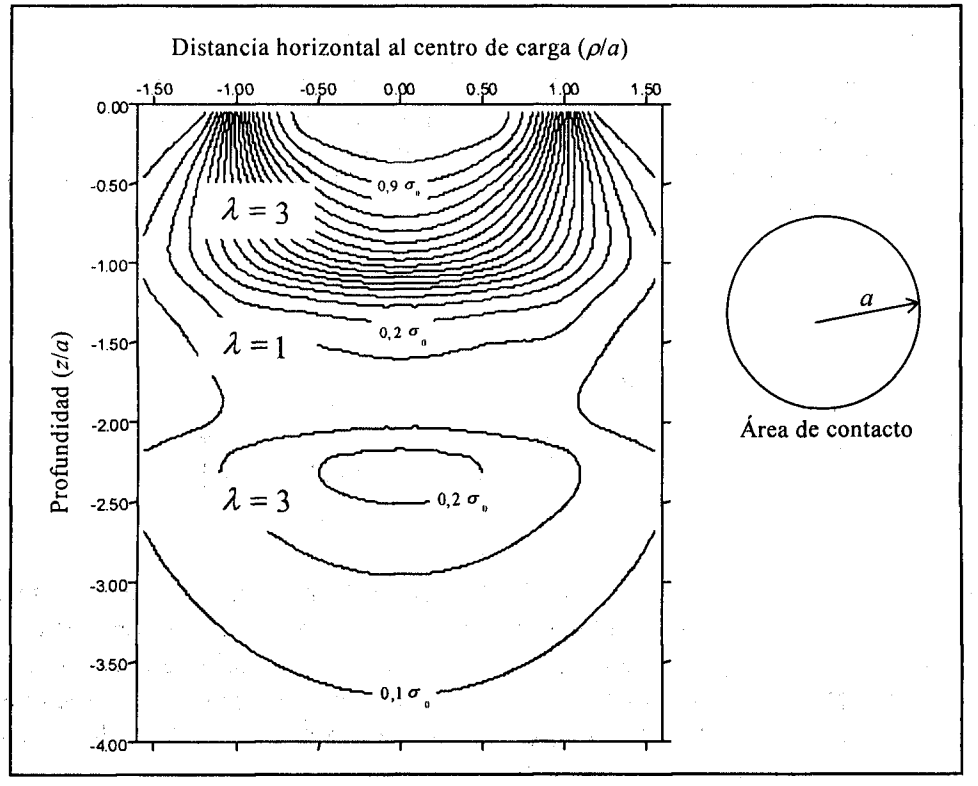

Figura 5. Distribución de tensión vertical para un perfil con estratas de distinto factor de concentración (λ).

Figure 5. Vertical stress distribution for soil profile with different concentration factors.

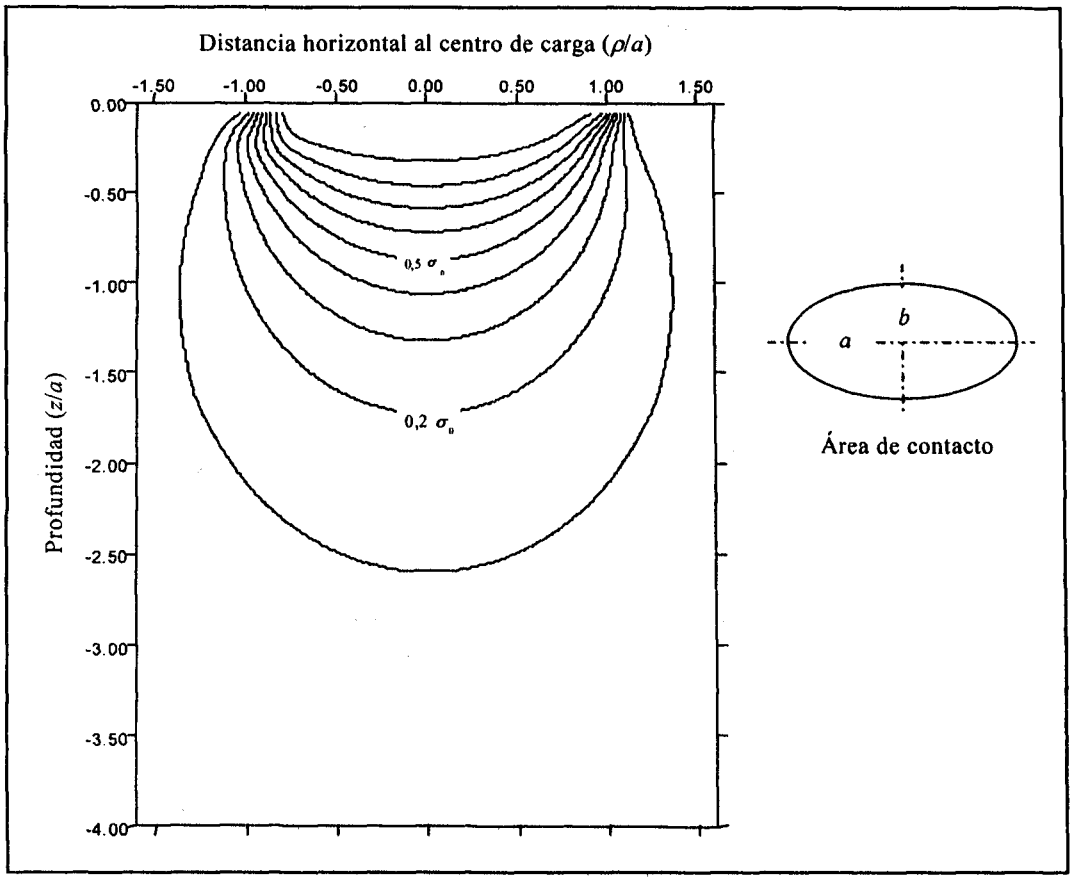

Figura 6. Distribución de tensión vertical para una superficie de contacto suelo-neumático de forma elíptica con b/a = ½ y presión de contacto uniforme σ_0.

Figure 6. Vertical stress distribution under eliptic contact soil-tire area (b/a = ½) and uniform contact pressure σ_0.

$$\sigma_z(\rho,\phi,z)=\lambda\frac{z^{\lambda}}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{a\left[\cos^2\phi'+\frac{\operatorname{sen}^2\phi'}{(b/a)^2}\right]^{-1/2}}\frac{\sigma_0\rho' d\rho'}{\left[k^2+\left(\rho'-\rho\cos(\phi-\phi')\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}+1}} \tag{15}$$

En el Cuadro 1 se presentan los factores de concentración calculados para un Hapludand cargado por un tractor con presión media de contacto σ_0 = 119 ± 12 k*Pa*. En el Caso 1 el coeficiente se ha determinado empleando la expresión tradicional (A.2) que asume una zona de contacto de forma circular y presión uniforme. En los demás casos se ha empleado la expresión (14) para formas circulares y elípticas de la zona de contacto suelo-neumático y distribuciones de presión que decaen cuadráticamente desde el centro al borde del área de contacto (Smith, 1998).

Cuadro 1. Factores de concentración para diferentes formas de la zona de contacto y distintos patrones de distribución de carga en ella

Table 1. Concentration factors for different shapes and load patterns at the contact area

Caso	Distribución de carga	Forma del área de contacto	Factor de concentración (calculado bajo el centro de carga)
1°	Uniforme	Circular	2,19
2°	Uniforme	Elíptica	2,43
3°	Lineal	Elíptica	1,70
4°	Cuadrática 1	Elíptica	2,05
5°	Cuadrática 2	Elíptica	1,51

El valor calculado para el factor de concentración puede cambiar considerablemente según la forma del área y distribución de carga que se considere. Según mediciones en terreno (Smith, 1998), la distribución de carga bajo un neumático más próxima a la real (entre las aquí consideradas) corresponde a la Cuadrática 2 con forma elíptica, para la cual el factor de concentración calculado por (14) sería de 1,51. La forma más reducida y tradicional de cálculo (A.2) entrega un valor de 2,19, es decir, clasifica al suelo con una resistencia menor a la obtenida bajo las condiciones "más realistas" empleadas con la expresión (14).

Si bien el coeficiente λ no permite caracterizar las condiciones de resistencia de un suelo sometido a carga en su superficie, no es menos importante que a través de ecuaciones como (14) nos permite estimar el esfuerzo vertical en cada punto del perfil. Por lo tanto, si se conoce el valor de preconsolidación del suelo a distintas profundidades, es decir, la máxima carga que cada estrata puede soportar antes de consolidarse, se puede determinar la magnitud de la compactación producida por la maquinaria con la cual se está trabajando. La determinación del valor de λ, sin embargo, es relativamente compleja (y económicamente costosa), ya que implica medir, mediante instrumentos adecuados, la presión generada por la carga en varios puntos y a distintas profundidades en el perfil. Es importante por ello, llevar a cabo investigación que permita relacionar el factor de concentración con parámetros físicos más fáciles de medir como son la cohesión (c), el coeficiente de roce (ϕ), el volumen y calidad del espacio poroso y la densidad radicular, entre otros.

CONCLUSIONES

A partir de la Teoría de la Elasticidad y la introducción en las ecuaciones del factor de concentración, λ, es posible obtener un modelo cuantitativo para la distribución de las tensiones verticales en el suelo.

El coeficiente λ es un parámetro factible de utilizar para caracterizar las condiciones de resistencia de un suelo sometido a una carga en su superficie.

Las formas tradicionales de cálculo del factor de concentración tienen limitaciones en su aplicación y pueden conducir a errores de estimación al no considerar las condiciones reales de geometría y distribución de la carga.

RESUMEN

La modelación matemática de los procesos de compactación en suelos de interés agrícola o forestal entrega una herramienta cuantitativa para estimar y predecir los cambios físicos generados en el suelo, los que posteriormente pueden compararse con las máximas variaciones permitidas sin dañar el potencial productivo del recurso. A partir de los postulados de la Teoría de la Elasticidad se derivaron las ecuaciones que describen la distribución de los esfuerzos en un medio semiinfinito y homogéneo, generados por una carga puntual en su superficie. Para adaptarla a un medio con las características de plasticidad del suelo, la ecuación del esfuerzo vertical, σ_z, fue modificada introduciendo el factor de concentración λ. Luego, aplicando el principio de superposición se obtuvo una expresión aplicable a distribuciones continuas de carga superficial y para cualquier geometría en la zona de contacto suelo-neumático. Se discute el efecto de la forma del área de contacto y distribución de la carga superficial mediante algunas simulaciones. Finalmente, diferentes formas de estimar el factor de concentración son analizadas, observándose que formas simplificadas de cálculo pueden llevar a estimaciones equivocadas.

Palabras claves: Distribución de esfuerzos, ecuaciones de Boussinesq, factor de concentración, compactación.

LITERATURA CITADA

BOUSSINESQ, J. 1885. Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques. Gauthier-Villais. París. 30 p.

DEXTER, A. 1986. Model experiments on the behaviour of roots at the interface between a tilled seed-bed and a compacted sub-soil. Plant and Soil 95: 123-133.

ELLIES, A.; SMITH, R. Y HORN, R. 1996. Transmisión de presiones en el perfil de algunos suelos. Agrosur 24(2): 149-158.

FRÖLICH, O. 1934. Druckverteillung im Baugrunde. Verlag von Julius Springer, Wiem. 178 p.

GUPTA, S. AND ALLMARAS, R. 1987. Models to asses the susceptability of soils to excessive compaction. Adv. Soil Sci. 6: 65-100.

GUPTA, S. AND RAPER, R. 1994. Prediction of soil compaction under vehicles. *In*: Soil Compaction in Crop Production. Soane, B. D. and van Ouwerkerk, C. (Eds.). Elsevier Science 4: 71-90.

HORN, R. 1989. The effects of different types of soil management on the mechanical loading of agricultural soils. Z. Pflanzenernaehr. Bodenkunde 149: 9-18.

HORN, R. AND LEBERT, M. 1994. Soil compactability and compressibility. *In*: Soil Compaction in Crop Production. B. D. Soane and C. van Ouwerkerk (Eds.). Elsevier Science. 3, pp. 45-69.

HORN, R.; DOMZAL, H.; SLOWINSKA-JURKIEWICZ, A.; AND VAN OUWERKERK, C. 1995. Soil compaction processes and their effects on the structure of arable soils and the environment. Soil and Tillage Research 35: 23-36.

LEBERT, M. AND BURGER, N. 1989. Effects of dynamic and static loading on compaction of structured soils. *In*: Larson, W.; Blake, G.; Allmaras, R.; Voorhes, W. and Gupta, S. (Eds.). Mechanics and related processes in structured agricultural soils. NATO ASI Series 172: 73-80.

SOEHNE, W. 1958. Fundamentals of pressure distribution and soil compaction under tractor tires. Agricultural Engineering 39: 276-281, 290.

SMITH, R. 1998. Un modelo para la distribución de esfuerzos verticales en perfiles de suelos agrícolas. Tesis de Magister en Física. Universidad Austral de Chile, Facultad de Ciencias. Valdivia, Chile. 69 p.

TAYLOR, J.; TROUSE, A.; BURT, E. AND BAILEY, A. 1982. Multipass behavior of a pneumatic tire in tilled soils. Transactions of the ASAE. 25: 1229-1236.

TIMOSHENKO, S. AND GOODIER, J. 1951. Theory of Elasticity. McGraw-Hill. New York. 506 p.

VOORHEES, C; SENST, G. AND NELSON, W. 1978. Compaction and soil structure modification by wheel traffic in the northern corn belt. Soil Science Society of America Journal 42(2): 344-349.

WASTERLUND, I. 1992. Extend and causes of site damage due to forestry traffic. Scan. J. For. Res. 7: 135-142.

WILLATT, S. AND PULLAR, D. 1983. Changes in soil physical properties under grazed pastures. Australian Journal Soil Research 22: 343-348.